２次方程式を利用して文章題を解く

３年＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

　ここからは，２次方程式を利用して文章題を解く勉強です。
　これまでも，１次方程式や，連立方程式，不等式を利用して文章題を解いてきました。基本的な考え方や手順は，それとちっとも変わりません。そこでまず基本的な手順とはどういうものだったかを復習してみましょう。

文章題を解く基本的な手順
１．文章をよく読み，問題の意味をつかむ。
２．何を文字で表すのか決める。
３．方程式を作る。
４．その方程式を解く。
５．求めた解が問題に適するかどうかを確かめて，答えを決める。

　２次方程式では「５」が特に大切なことなのです。それは２次方程式では解が普通２つあるということによります。解が２つあるうち，
「２つともその文章題の答えになる。」
「１つだけがその文章題の答えになる。」
「どちらもその文章題の答えにならない。
　（つまり答えがない。）」
　という場合のどれかを確かめなくてはなりません。つまり求めた２つの解がどちらとも問題にあてはまるとは限らないのです。
　例えば長さなら正の数でなければなりません。また，長方形の１辺の長さを５ｃｍ短くするというのなら，元の長さは５ｃｍよりも長くないといけません。そういった意味で，解答には確かめをする文章を必ず書くことが必要です。

　また，２次方程式に限らず，どんな文章題でも難しいのが「３」。方程式が作れれば，苦労はしない。このテキストでは，いろいろな文章題をだいたい分類し，（といっても２次方程式にはそんなにたくさんの種類はないのだけれども）そのそれぞれの種類の問題をいくつか集めて練習をしようというものです。

　文章題では，こうすれば必ずわかるといういい方法はありません。とにかく自分でいろいろと問題にあたってみるしかない。（じゃあ数学の教師ってなんのためにいるのさということになりますが……）このテキストではまず例題をあげ，その解き方をまねしてみることによって問題の考え方をつかもうというものです。ということで，まずは順に読んでみましょう。そしてやってみましょう。それしかないのだよ。

　なお，問題はたくさん集めてあるが，とりあえずは基本問題に取り組むように。
　これは必修問題です。

　ゆとりがあったら練習問題に取り組んでみよう。この練習問題くらいができるようになれば，まずまずだね。
　練習問題は補充の問題だから，試験前に取り組んでみてもいいね。
　日本全国の各教科書会社の問題はほとんど収録してあります。つまりこのテキストの練習問題までやれば，基本的な問題は完璧ということですよ。

　発展問題は数学大好きな人，挑戦意欲旺盛な人，ヒントも何もなしでやってやろうという根性の人，やってみましょう。
　入試問題からも集めてきましたから，応用力をつけるためにはもってこいの問題ですよ。

では問題の分類兼目次

　本当はひとつのパターンに当てはめられる問題ではなく，いったいどう考えたらいいんだろうかと考えることが数学では大切。これまでにない問題が出されたときにそれまでの知識を総動員して問題の解決にあたるというのが大切なのだ。決まり切った方法で解けるような問題はおもしろくない。
　といいながらも，このように問題の分類をしているわけだけど，基礎練習だね。基礎を積み重ねて応用がきくように，これからもいろいろな問題に取り組んでいきましょう。

§.1　条件にあてはまる数を求める問題

数の間にいろいろな条件が与えられていて，その数を求める問題はよくある種類の問題である。とくに２数の関係からそれらの数を求める問題は２次方程式となることが多い。

ということで，手始めに，２次方程式の応用の練習として，この種類の問題をやってみよう。

まずは１つの数に関する問題。

例題１　ある正の整数がある。
この数とこの数の２乗の和が２０になるとき，この数を求めよ。

考え方　求める数を x とすると，この条件にあてはまるように，素直に関係式を作ればよろしい。

（ある数）＋（ある数の２乗）＝２０

ということである。

解答

ある数を x とすると

$$x + x^2 = 20$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$(x + 5)(x - 4) = 0$$

$x + 5 = 0$　または　$x - 4 = 0$

$x = -5$　　　　　$x = 4$

x は正の数であるから，$x = -5$ は問題にあわない。

答　４

解説　ここで，最後の行のように

「x は正の数であるから，$x = -5$ は問題にあわない」

と書く必要があるのだ。

つまり，求めた２次方程式の２つの解が問題にあてはまるかどうかを確かめる必要がある。

と同時のそのことを文章で表現する必要がある。

この文章についてはこれといった書き方のきまりがあるわけではない。

その問題ごとに考えて表現すればよい。

たいていはこんな感じ。

「x は××であるから，x ＝○は問題にあわない。」

「x は××であるから」の部分には，
「x は正の数であるから」とか
「$x > 5$ であるから」とか
「x は自然数だから」とかいろいろあるね。

では続いて，２数に関する問題。この場合次のような手順で解くことが多い。

①．１つの未知数を x とする。
②．一方の条件を使って，他の１つの数を x で表す。
③．他方の条件を使って，２数（①の x と②の x で表したもう１つの数）を結びつけ，２次方程式を作る。
④．この方程式を解いて解を求める。
⑤．②の条件からもう１つの数を求める。
⑥．２つの数が条件にあてはまっているか確かめる。

注１　条件は２数の和，差，積などであったり，連続した自然数であったりする。

注２　④で解を求めると２つ出るが，これが答となる２つの数ではなく，２組の数の一方の数である。
つまり答えが
Ａ組のａ，ｂ
Ｂ組のｃ，ｄ
とすると，④で求めたのはａとｃである。
（言っとることわかるかなー？まとにかく例を見て下さい。）

例題２　大小２つの数がある。
その差は５で，積は３６になるという。
この２つの数を求めよ。

考え方１　小さい方の数を x とすると，大きい方の数は $x+5$ である。
これらの２数の積が３６である。

解答１
小さい方の数を x とすると

$$x(x+5)=36$$
$$x^2+5x-36=0$$
$$(x+9)(x-4)=0$$
$$x+9=0 \qquad x-4=0$$
$$x=-9 \qquad x=4$$

$x=-9$　のとき
大きい方は　$-9+5=-4$
$x=4$　のとき
大きい方は　$4+5=9$

答　－９と－４，４と９

考え方２　小さい方の数を x としたのであるが，もちろん大きい方の数を x として解くこともできる。
大きい方の数を x とすると，
小さい方の数は $x-5$ である。
これらの２数の積が３６である。

解答２
大きい方の数を x とすると

$$(x-5)x=36$$
$$x^2-5x-36=0$$
$$(x+4)(x-9)=0$$
$$x+4=0 \qquad x-9=0$$
$$x=-4 \qquad x=9$$

$x=-4$　のとき
小さい方は　$-4-5=-9$
$x=9$　のとき
小さい方は　$9-5=4$

答　－９と－４，４と９

注３　２次方程式を解いて得られた２つの解
例えば解答２ならば－４と９というのが求める２つの数ではない。
これらの２つ解は求める２つの数のそれぞれの一方である。
だから，それぞれの場合について，もう一方の数を求めてやらなくてはならないということである。
（これが注２で言いたかったことなのだよ。）

例題３　大小２つの数がある。その和は１２で，積は３２になるという。
この２つの数を求めよ。

考え方１　小さい方の数を x とすると，
大きい方の数は $12-x$ である。
これらの２数の積が３２である。

解答
小さい方の数を x とすると

$$x(12-x)=32$$
$$12x-x^2=32$$
$$12x-x^2-32=0$$
$$-x^2+12x-32=0$$
$$x^2-12x+32=0$$
$$(x-4)(x-8)=0$$
$$x-4=0 \qquad x-8=0$$
$$x=4 \qquad x=8$$

$x=4$　のとき
大きい方は　$12-4=8$
$x=8$　のとき
大きい方は　$12-8=4$
小さい方が８で大きい方が４というのは適さない。

答　４と８

解説　方程式を解いて求められた解の４と８をそのまま答としてよいように思うが，今の場合，小さい方を x としたのであるから，必ず大きい方を求めておかなくてはならない。
そして，解の吟味をする必要がある。
また，「求める数を x とする。」というような未知数の設定はできない。なぜなら求め

る数は２つあるわけで，いったいどちらを x としたのかをはっきりとさせておかなくてはならないからである。

例題４　連続した２つの整数がある。
それぞれを２乗した和が４１であるという。これらの整数を求めよ。

考え方　小さい方の数を x とすると，大きい方の数は $x+1$ と表される。
この x と $x+1$ を使って方程式をつくる。

解答
小さい方の数を x とすると

$$x^2+(x+1)^2=41$$
$$x^2+x^2+2x+1=41$$
$$2x^2+2x-40=0$$

両辺２で割って

$$x^2+x-20=0$$
$$(x+5)(x-4)=0$$
$$x+5=0 \qquad x-4=0$$
$$x=-5 \qquad x=4$$

$x=-5$　のとき
大きい方は $-5+1=-4$
$x=4$　のとき
大きい方は　$4+1=5$
このどちらも問題の答えとしてよい。

答．　-5 と -4，4 と 5

解説　例題３では求めた２つの解のうちの一方は適していなかった。しかし，この例題４では求めた解の２つともが条件にあてはまっている。
このように，毎回適しているのかどうかを吟味する必要があるのだ。

注「このどちらも問題の答えとしてよい。」
という表現だが，このような場合には
「どちらも問題に適する」
「どちらの解も題意にあてはまっている」
「どちらも文章の意味にあてはまっている」
などといろいろな表現がある。
どんなことでもそうだが，読む人にわかりやすく，いいたいことが伝わればいいのだ。

例題５　ある数を２乗しなければならないのに，誤って２倍したため，計算の結果が４８小さくなったという。
その数を求めよ。

考え方　求める数を x とすると，正しい計算の結果と，誤った計算の結果のそれぞれを x を用いた式で表す。
そして，その２つの式の関係をつくる。
この場合は
（正しい計算結果）$=x^2$
（誤った計算結果）$=2x$
である。
そして，
(正しい計算結果)$-48=$(誤った計算結果)
となる。

解答
ある数を x とすると

$$x^2-48=2x$$
$$x^2-2x-48=0$$
$$(x+6)(x-8)=0$$
$$x+6=0 \qquad x-8=0$$
$$x=-6 \qquad x=8$$

どちらも問題に適する

答．　-6，　8

Ⅰ．基本問題

① ある数とその数の平方との和は９０である。ある数を求めよ。

② ある正の数から３をひいて，これにもとの数をかけると２８になるという。
もとの数を求めよ。

③ 連続する２つの整数がある。
この２数の２乗の和は６１になるという。
この２数を求めよ。

④ 連続する２つの整数の積が５６であるとき，この２数を求めよ。

⑤ 大小２つの数がある。その差は７で，積は１４４になるという。この２数を求めよ。

⑥ ２つの数があって，その和は１３で，積は２２になるという。
このような２数を求めよ。

⑦ 大小２つの数があり，その差は４で，大きい方の数の２乗はこの２数の積の３倍に等しいという。この２数を求めよ。

⑧ ３つの続いた整数のそれぞれの平方をつくり，その和を求めたら３０２になった。
もとの３つの整数を求めよ。

⑨ 大小２つの数がある。その和は８で，２数の平方の和が３４になるという。
このような２数を求めよ。

⑩ ある素数の２乗に７を加えると，もとの素数の８倍に等しくなるという。
この素数を求めよ。

⑪ ある数 x に３を加えて２乗するところを，x に３を加えて２倍してしまった。しかし，答えは同じ数になった。x の値を求めよ。

⑫ ある数 x を２乗しなければならないのに，誤って２倍したため，計算の結果は１２０だけ小さくなった。ある数 x を求めよ。

Ⅱ．練習問題

① ２つの数がある。この２数の和が１１で，積が３０であるとき，この２数を求めよ。

② 積が１４３である連続する２つの奇数を求めよ。

③ ２つの数がある。
その差は８で，積は１２８になるという。
このような２数を求めよ。

④ 和が６で，積が７である２数を求めよ。

⑤ 連続する３つの正の整数がある。
最も大きい数の２乗は，他の２数の２乗の和よりも２１小さいという。
この３つの整数を求めよ。

⑥ 連続した３つの正の整数がある。
小さい方の２つの数の積は，３つの数の和に等しいという。
これらの整数を求めよ。

⑦ ２つの正の整数があり，その差は７で積が６０であるという。
この２数を求めよ。

⑧ 連続した３つの整数がある。
その３つの整数の平方の和は，３つの中でもっとも大きい数の平方の２倍に５を加えたものであるという。
この連続した３つの整数を求めよ。

⑨ 連続する３つの整数があり，おのおのの２乗の和が１１０であるという。
それらの整数を求めよ。

⑩ ２つの正の整数がある。その差は９で，小さい数の平方は大きい数の３倍より１だけ大きいという。このような２数を求めよ。

⑪ ある正の数と，それより１だけ大きい数との積を求めるところを，誤って１だけ小さい数との積を求めたので，答が１３２となった。
もとの数はいくらか。
また，正しい積を求めよ。

⑫ ４つ続いた整数の和が，そのうちのもっとも小さい整数と，最も大きい整数との積に等しいとき，それらの整数を求めよ。

⑬ ある数に３を加えて２乗したら，もとの数より５９大きくなったという。もとの数を求めよ。

⑭ ある数 x を平方して２倍したら，x の３倍に２０を加えたものに等しくなったという。
x の値を求めよ。

⑮ ある数を２乗しなければならないのに，誤って２倍したため，計算の結果が３５小さくなった。この数を求めよ。

⑯ 大小２つの数がある。その差は５で，積は１４になるという。このような２数を求めよ。

　２次方程式の応用としてはよく出てくる問題なのだ。
　なぜ辺の長さや面積が２次方程式の問題として出てくるかというと，面積が２次元の世界だからだね。
　面積の単位をみたってホラ，「ｍ²」とか「ｃｍ²」とか２乗になってるじゃあないですか。
　つまり，面積を求めていくと，どこかで辺の長さ（x）と辺の長さ（x）の積で x　２が出てくるのです。

　では例題。

例題１　正方形の花だんに下の図のような幅１ｍの道を２本つくると，道を除いた花だんの面積が４５ｍ²になったという。
　はじめの花だんの１辺の長さを求めよ。

解答

（おーっと，某社の教科書のコピーで手抜きをしてしまったが）いかがかな。

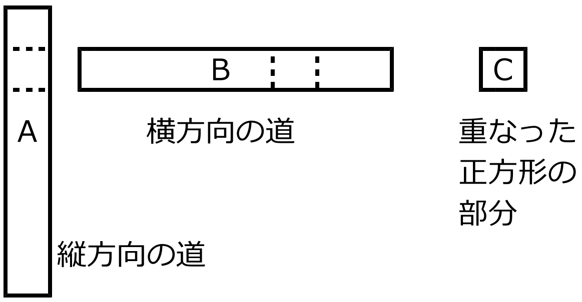
　ここではこのひとこと
「××は問題にあっているが，××は負になり，問題にあっていない。」
　というのがとっても大事。

　つまり，この場合は２次方程式を解いて求めた解のうちの２つともを答えとしては採用できない。そこでそのことを書く必要があるということだ。
　これが §.１でもたくさん書いてあった「解の吟味」というやつだ。
　しつこいが，これ書いとかんと減点やぞ！（とすくおどしちゃうのが教師の悪いくせやね）
　この手の表現としてはいろいろある。そのときそのときに応じて考える必要があるということだ。

例題２　長さが４０ｃｍのひもで長方形をつくったところ，その面積が８０ｃｍ²になった。
　この長方形の縦と横の長さをそれぞれ求めよ。

例題３　縦が１６m，横が２０mの長方形の花だんに，下の図のような同じ幅の道をつくり，残りの花だんの面積を２２１m^{2}にしたい。
　道幅をいくらにすればよいか。

考え方　道幅をxmとすると，
　縦の方向の道路（A）の面積は１６ x m^2。
　横の方向の道路（B）の面積は２０ x m^2。
　２つの道路が重なった部分（C，形は正方形）の面積はx ２m^{2}である。



　このことから次の関係式が得られる。
　（A）＋（B）－（C）＝（道）
　つまり，AとBをたすと，重なった部分Cは２回分たしたことになり，その分をひかないと道の面積が出ない。

　では，全く同じ十文字の道をつくる問題だが，別の考え方を紹介しておこう。
　図の中にヒントが書いてある教科書があったのでそれをそのまま載せる。

例題４　縦３０m，横４５mの長方形の土地に，下の図のように縦，横同じ幅の道をつけて残りの土地を花だんにしたい。
　花だんの総面積を１０００m^{2}にするには道の幅を何mにすればよいか。

考え方２　道幅をxmとする。
　このとき，道路はどこにあっても残りの土地の面積は等しい。そこで，この道路をぎりぎり一番端までずらして考えるのである。
　（図参照。あったまいい考え！）
　つまりこの残りの土地の面積は
　縦（３０－ x）m，横（４５－ x）m　の長方形の面積に等しいのである。

　それではコピーのついでにも一つコピー。石川県の公立高校の入試問題から。久しぶりに２次方程式の文章題が入試に出ましたねえ。（１９８８年３月）これまで公立の入試ではほとんど２次方程式が出なかった。
　で，久しぶりに出たのはどこの教科書にも載っている易しい問題。
　しかしそこはさすが入試問題。（何がさすがかよくわからんが…）答えを平方根表から近似値で出せときた。これにひっかかった人が多かったようであります。

（全県の受験生の正答率は１４．０%，無答率３９．７%，立式のみの正答率，つまり式はできたが解いて答まで至らなかった者は４５．０%でした。）

　ではやってみましょう。

例題５（１９８８年度入試）

解答

　道幅を x mとする。

$$(35-x)(25-x)=800$$

$$875-35x-25x+x^2=800$$

$$x^2-60x+75=0$$

$$x=\frac{-(-60)\pm\sqrt{(-60)^2-4\times1\times75}}{2\times1}$$

$$=\frac{60\pm\sqrt{3300}}{2}$$

$$=\frac{60\pm10\sqrt{33}}{2} \qquad \frac{60\pm57.45}{2}$$

$$x=\frac{117.45}{2}=58.725$$

$$x=\frac{2.55}{2}=1.275$$

x は２５未満であるから

$x=1.275=1.3$

答　１．３m

　注　このように平方根の近似値が与えられていて，小数第何位まで求めよといったようなときには答は近似値で出すが，特に指定のないときには根号のついている数のままで答えればよい。

　では，例題１と同じ種類の問題を近似値を用いて求める問題にするとこうなる。

例題６　正方形の土地を利用して，下の図のような幅１mの道２本分を除いた面積が５０m²になる花だんを作りたい。

　１辺がいくらの正方形の土地があればよいか。

　ただし，下の平方根表を用い，四捨五入して，小数第１位まで求めよ。

a	５０	５１	５２	５３
$\sqrt{a}$	7.071	7.141	7.211	7.280

Ⅰ．基本問題　－道つくり編－

①　縦が２６m，横が３５mの土地に，下の図のように縦，横同じ幅の道路をつけて，残りを畑にしたい。
　畑の面積が８５０m²になるようにするには，道路の幅を何mにすればよいか。

②　横が縦より６m長い長方形の土地に，下の図のように幅２mの道路と幅３mの道路をつけたら，残りの土地の面積が８４m²になった。
　もとの土地の面積を求めよ。

③　正方形の土地に，縦，横の辺に平行に幅１mの通路をとり，残りの部分を花だんにしたら，花だんの面積が１２１m²となった。
　この正方形の土地の１辺の長さを求めよ。

④　横が縦の２倍である長方形の畑に，下の図のような一定の幅の道をつくったら畑の面積は１００m²になった。
　もとの畑の縦，横の長さは何mか。

⑤　下の図のように，円形の花壇のまわりに幅１mの道をつけたら，花だんの面積と道の面積が等しくなった。
　花だんの半径は何mか。

⑥　右の図のような長方形の池のまわりに同じ幅で芝生を植えて，芝生の面積を２０m²にしたい。
　芝生の幅を何mにすればよいか。

Ⅱ．基本問題　－面積変化編－

①　下の図のように，正方形の縦を３ｃm短くし，横を４ｃm長くして長方形をつくったら，長方形の面積は６０ｃmになった。
　もとの正方形の１辺の長さを求めよ。

②　縦６ｃm，横８ｃmの長方形の縦，横を同じ長さだけ縮めて，面積をもとの長方形の半分にしたい。何ｃm縮めればよいか。

③　横が縦より１０m長い長方形の土地がある。この土地の縦を２m長くし，横を２m短くしたら，面積が６１６m²になった。
　もとの土地の縦，横の長さをそれぞれ求めよ。

④　ある正方形の１辺を２ｃm長くし，他の１辺を４ｃm長くすると，面積はもとの正方形の３倍になるという。
　この正方形の１辺の長さを求めよ。

⑤　縦１０ｃm，横２０ｃmの長方形の縦と横を同じ長さだけ長くして，もとの面積の３倍の面積の長方形にしたい。
　縦，横を何ｃmずつ長くすればよいか。

Ⅲ．基本問題　－長方形作成編－

①　周囲の長さが６０ｃmで，面積が２２０ｃm²の長方形をつくりたい。
　この長方形の２辺の長さをどれだけにすればよいか。
　mmの単位まで求めよ。

②　縦が横よりも３m長い長方形の花だんをつくり，その面積を４０m²にしたい。
　縦，横の長さをどれだけにすればよいか。

③　下の図のような直角二等辺三角形ＡＢＣがある。
　３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にそれぞれ点Ｄ，Ｅ，Ｆをとり，面積が１４ｃｍ²の長方形ＢＤＥＦをつくりたい。
　ＢＤの長さを何ｃｍにすればよいか。

④　∠Ｃ＝９０°，ＡＣ＝ＢＣ＝１５ｃｍ　の△ＡＢＣがある。
　ＡＢ上に点Ｄをとって，下の図のように，長方形ＤＥＣＦつくり，その面積を５６ｃｍ²にしたい。
　ＣＥの長さを何ｃｍにすればよいか。

Ⅳ．基本問題　－面積問題あれこれ－

①　下の図のような台形ＡＢＣＤがある。
　この台形の面積が１６ｃｍ²のとき，ＢＣの長さを求めよ。

②　下の図の台形ＡＢＣＤで，辺ＢＣの長さは６ｃｍで，辺ＡＤの長さと辺ＡＢの長さは等しい。
　この台形の面積が２０ｃｍ²であるとき，辺ＡＤの長さは何ｃｍか。

③　面積が２４ｃｍ²の台形がある。この台形の上底と高さは等しく，下底は上底より２ｃｍ長いという。
　この台形の上底は何ｃｍか。

④　面積が２１６ｃｍ²の三角形がある。この三角形の高さは，底辺より６ｃｍ短いという。
　三角形の底辺は何ｃｍか。

⑤　幅３０ｃｍのトタン板の左右を下の図のように折り曲げて，といを作ることにした。
　このといの断面積を１１２ｃｍ²にするには，左右を何ｃｍずつ折り曲げればよいか。

⑥　幅２２ｃｍの紙を下の図のように折り曲げて，切り口の長方形の面積を５６ｃｍ²にしたい。
　紙の端から何ｃｍのところを折ればよいか。

⑦　縦と横の長さが１２ｃｍ，１８ｃｍの長方形の紙で下の図のように４すみから同じ大きさの正方形を切り取り，箱をつくりたい。
　箱の底面積を７２ｃｍ²とするには，切り取る正方形の１辺の長さを何ｃｍにすればよいか。

Ⅴ．練習問題　－道つくり編－

①　２辺の長さが２５ｍ，３６ｍの長方形の畑がある。これに下の図のように，縦と横に同じ幅の道をつくり，残った畑の面積が８４０ｍ²になるようにしたい。
　道幅はどれだけにしたらよいか。

Ⅵ．練習問題　－面積変化編－

①　縦が１２ｍ，横が１５ｍの長方形がある。この縦と横を同じ長さだけのばして長方形をつくり，その面積がもとの長方形の面積の１．５倍になるようにしたい。
何ｍのばしたらよいか。

②　正方形がある。その一辺の長さを３ｃｍ減らし，他の一辺の長さを４ｃｍ増やして長方形を作ったら，面積が１４４ｃm^2になったという。もとの正方形の一辺の長さは何ｃｍか。

③　正方形の縦を２ｃｍ，横を３ｃｍ長くして長方形を作ると，長方形の面積はもとの正方形の面積の２倍になった。
もとの正方形の１辺の長さを求めよ。

④　正方形がある。いま，この正方形の一辺を９ｃｍ長くし，他の一辺を６ｃｍ短くすると，面積が５９４ｃm^2の長方形になるという。
この正方形の一辺の長さを求めよ。

⑤　ある正方形の１辺を２ｃｍ長くし，他の１辺を４ｃｍ長くすると，面積はもとの正方形の３倍になるという。
この正方形の１辺の長さを求めよ。

Ⅶ．練習問題　－長方形作成編－

①　ある長方形の面積は５ｃm^2で，横が縦よりも２ｃｍ長いという。
この長方形の縦の長さを求めよ。

②　下の図のように，直角二等辺三角形ＡＢＣの中に面積が３２ｃm^2の長方形ＢＤＥＦをつくりたい。
ＢＤの長さを何ｃｍにすればよいか。

③　ＡＣ，ＢＣの長さが１０ｃｍの直角二等辺三角形ＡＢＣがある。
右の図のように辺ＢＣ上に点Ｄをとって，長方形ＤＣＥＦをつくり，この面積が２０ｃm^2になるようにしたい。
ＤＣの長さをいくらにすればよいか。ｍｍの単位まで求めよ。

④　面積が４８ｃm^2で，横が縦より８ｃｍ長い長方形をつくるには，縦，横をそれぞれどれだけにすればよいか。

⑤　長さ３０ｃｍの針金で長方形をつくり，その面積が５６ｃm^2になるようにしたい。
長方形の縦，横の長さをそれぞれ何ｃｍにしたらよいか。

⑥　辺ＡＢが１０ｃｍの長方形ＡＢＣＤの中に正方形ＰＢＣＱを作ったら，長方形ＡＰＱＤがもとの長方形と相似になった。
辺ＡＤの長さを求めよ。

Ⅷ．練習問題－面積問題あれこれ－

①　大小２つの正方形がある。大きい方の正方形の一辺の長さは小さい方の一辺の長さの２倍で，２つの正方形の面積の和は１００ｃm^2である。それぞれの正方形の一辺の長さはいくらか。

②　縦の長さが横の長さの２倍で，
高さが８ｃｍの直方体を作り，
体積を２４０ｃm^2にしたい。
縦，横それぞれ何ｃｍにすればよいか。

Ⅸ．練習問題－体積問題あれこれ－

①　横が縦より４ｃｍ長い長方形の紙がある。
この紙の４すみから１辺が３ｃｍの正方形を切り取り直方体の容器をつくったら，容積が９６ｃm^3になった。
紙の縦，横の長さを求めよ。

　これはこのあと習う２次関数（２乗に比例する関数）のところでも再び出てくるのだが，図形の中をある点が移動したり，関数のグラフ上を点が移動したりして
「ある特別の条件になるにはその点はどのような点であるのか」
　という問題である。
　この手の問題は１次関数のところでもやったものである。
　たとえば点Ｐやら点Ｑが動いて△ＡＰＱの面積が××になるのは何秒後か？とかいった問題だ。
　関数の中では，
「ある特別の条件になるにはその点の座標は何か」
　という問に変わるわけだが，問題の中味はさほど変わらない。
　この特別な条件というのは例えば，
・面積が等しくなる。
・面積が××分の××になる。
・面積が××倍になる。
　といったような内容である。
　つまりこのときに，面積が時間や座標の関数になっている。

例題　次の図のような一辺の長さが６ｃｍの正方形ＡＢＣＤにおいて，点ＰはＡを出発してＢまで動く。
　また点Ｑは，点Ｐと同時にＤを出発し，Ｐと同じ速さでＤＡ上をＡまで動く。
　点ＰがＡから何ｃｍ動いたとき，△ＡＰＱの面積が３ｃｍ^{2}になるか。

考え方
ＡＰ＝x ｃｍとすると，
ＤＱ＝x ｃｍ，ＡＤ＝６ｃｍ　より
ＡＱ＝（６－x）ｃｍ　となる。

Miso　この手の問題では図の中にわかる長さをすべてxを使って表すことである。

解答
　ＡＰ＝x ｃｍとする。
　ＤＱ＝x ｃｍ，ＡＤ＝６ｃｍより
　ＡＱ＝（６－x）ｃｍ
　したがって，
$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times AP \times AQ$$
より
$$3 = \frac{1}{2} \times x \times (6 - x)$$
　式を整理して
$$x^2 - 6x + 6 = 0$$
　これを解くと
$$x = 3 \pm \sqrt{3}$$

　この解はいずれも　$0 < x < 6$
　であるから，問題に適する。
答．（$3+\sqrt{3}$）ｃｍ，（$3-\sqrt{3}$）ｃｍ

Ⅰ基本問題

①　次の図のような一辺の長さが６ｃｍの正方形ＡＢＣＤにおいて，点ＰはＡを出発してＢまで動く。
　また点Ｑは，点Ｐと同時にＤを出発し，Ｐと同じ速さでＤＡ上をＡまで動く。
　このとき，点ＰからＢＣに平行な直線をひき，ＤＣとの交点をＥとする。
　点ＰがＡから何ｃｍ動いたとき，台形ＱＰＥＤの面積が８ｃｍ^{2}になるか。

②　ＡＢ＝１０ｃｍ，ＢＣ＝２０ｃｍ　の　長方形ＡＢＣＤがある。
　点Ｐは，辺ＡＢ上をＡからＢまで毎秒１ｃｍの速さで動き，点Ｑは，辺ＢＣ上をＢからＣまで毎秒２ｃｍの速さで動くものとする。
　Ｐ，Ｑが同時に出発するとき，何秒後に△ＰＢＱの面積が２４ｃｍ^{2}になるか。

③　下の図のような直角二等辺三角形ＡＢＣにおいて，点ＰはＡを出発して，ＡＢ上をＢに向かって動いている。
　点Ｐを通って，ＡＣに平行にひいた直線がＢＣと交わる点をＱとする。
　点ＰがＡから何ｃｍ動いたとき，台形ＡＰＱＣの面積が１４ｃｍ^{2}になるか。

④　縦１０ｃｍ，横１５ｃｍの長方形ＡＢＣＤがある。
　点Ｐは辺ＢＡ上をＢからＡまで毎秒１ｃｍの速さで動く。
　点Ｑは辺ＤＡ上をＤからＡまで毎秒１ｃｍの速さで動く。
　Ｐ，Ｑが同時に出発するとき，△ＡＰＱの面積が３３ｃｍ^{2}となるのは何秒後か。

⑤　下の図で，点Ｐは $y = x + 2$ のグラフ上の点であり，点ＡはＰＯ＝ＰＡとなる x 軸上の点である。
　Ｐの x 座標を a として，次の問に答えよ。
　ただし，$a > 0$ とし，座標の１目もりは１ｃｍとする。

(*1*) 点Ｐの y 座標をいえ。

(*2*) 点Ａの座標をいえ。

(*3*) △ＰＯＡの面積が１５ｃｍ^{2}のとき，点Ｐの座標を求めよ。

⑥下の図のように　１次関数 $y = -\dfrac{2}{3}x + 6$ のグラフ上に点Ｐをとり，Ｐから x 軸に垂線をひき，x 軸との交点をＱをする。
　一目盛りは１ｃｍとして，四角形ＡＯＱＰの面積が２４ｃｍ^{2}となるときのＰの座標を求めよ。

考え方　解とは，その方程式に代入して成り立つ値のことである。

ということで，解が x ＝×× とあれば，もとの方程式に代入してやればよい。

その解が１つならば，その値を代入すると，別の文字についての１次方程式ができるはず。

これが次の例題１である。

例題１　２次方程式 $x^2 + ax - 56 = 0$ の１つの解が４であるとき，他の解を求めよ。

解答

$x^2 + ax - 56 = 0$ に $x = 4$ を代入して

$$4^2 + a \times 4 - 56 = 0$$
$$16 + 4a - 56 = 0$$
$$4a = -16 + 56$$
$$4a = 40$$
$$a = 10$$

そこで，$x^2 + ax - 56 = 0$ に a＝１０ を代入して

$$x^2 + 10x - 56 = 0$$
$$(x - 4)(x + 14) = 0$$
$x - 4 = 0$ または $x + 14 = 0$

$x = 4$　　　　$x = -14$

一方の４は初めにわかっている解であるから，求める解は $x = -14$ である。

答　$x = -14$

注　当然のことながら，a を求めたあと方程式を解くと，初めに与えられていた 解 $x = 4$ が出てくる。

これが出てこないとすれば，どこか計算がおかしいということである。

次の問題として，その解が２つ与えられているならば，その２つを代入すると，別の２つの文字についての連立方程式ができるはず。

これが下の例題２である。

例題２　２次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解が２と３ならば，a と b の値はいくらか。

解答

$x^2 + ax + b = 0$ に $x = 2$ を代入して

$$4 + 2a + b = 0$$
$$2a + b = -4 \quad \cdots\cdots①$$

$x^2 + ax + b = 0$ に $x = 3$ を代入して

$$9 + 3a + b = 0$$
$$3a + b = -9 \quad \cdots\cdots②$$

$$\begin{array}{lr} ② & 3a + b = -9 \\ -)\ ① & -)\ \ 2a + b = -4 \\ \hline & 3a + b = -9 \\ & +)\ -2a - b = +4 \\ \hline & a \quad = -5 \quad \cdots\cdots③ \end{array}$$

③を②に代入して

$$3 \times (-5) + b = -9$$
$$b = 6$$

$$a = -5,\ b = 6$$

答　$a = -5,\ b = 6$

Ⅰ基本問題

① xについての　２次方程式

$$x^2-ax+2a=0$$

の１つの解が　１　であるという。次の問に答えよ。

(1) aの値を求めよ。

(2) もう１つの解を求めよ。

② 方程式

$$2x^2+mx+n=0$$

の解は，$x=-1$，$x=3$であるという。このとき，mとnの値を求めよ。

③（栃木 93）２次方程式

$$x^2-ax+2a=0$$

の１つの解が　$x=3$　であるとき，aの値を求めよ。

④（福岡 93）２次方程式

$$x^2+2x-a=0$$

の１つの解が　-3　であるとき，もう１つの解を求めよ。

⑤（新潟 93）　１次方程式

$$3x-4=x$$

の解が，xについての２次方程式

$$x^2-ax-a^2-5=0$$

の１つの解になっているとき，aの値を求めよ。

Ⅱ．練習問題

①　２次方程式

$$x^2+ax-8=0$$

の１つの解が　２　であるとき，aの値を求めよ。また，他の解を求めよ。

②　２次方程式

$$x^2+ax+b=0$$

の解が５と８であるという。a と b の値を求めよ。

③ xの２次方程式

$$ax^2+(a+2)x-(a-1)=0$$

の１つの解が　-2　であるのは a がいくらのときか。また，そのとき，この方程式のもう１つの解を求めよ。

④２次方程式

$$x^2+px+30=0$$

の１つの解が　$x=-5$　であるという。このとき，ｐの値を求めよ。また，もう１つの解を求めよ。

⑤２次方程式

$$x^2+2x-a=0$$

の１つの解が　-3　であるとき，もう１つの解を求めよ。

⑥ xについての２次方程式

$$x^2+ax+a-1=0$$

の解の１つが-3であるとき，aの値ともう１つの解を求めよ。

⑦（高知 93）２次方程式

$$x^2-ax-6=0$$

の１つの解が　$x=6$　であるとき，他の１つの解を求めよ。

Ⅲ．発展問題

① xについての２次方程式

$$x^2+nx+n-1=0$$

の解が１つしかないとき，nの値とその解を求めよ。

考え方　２次方程式のところで学んだわけだが，解が１つになるというのは解の公式で，根号の中の部分，つまり b^2-4ac が０となるときである。

そこで，この２次方程式を，このまま文字を使って解の公式で解く。そのとき，根号の中の部分つまり b^2-4ac に a，b，c の値を代入する。ここで，$a=1$，$b=n$，$c=n-1$である。これらを代入して n についての方程式を作るのだ。

②　２次方程式

$$3x^2-6x-2=0$$

の解のうち，負の方をtとするとき，

t^2-2t+3　の値を求めよ。

物を投げ上げたり，落としたり，斜面を転がしたりしたときに，かかった時間と，そのあいだに動いた距離との関係は２次方程式の問題としてよく取り扱われる。

とはいえ，これは，理科の問題なのだ。そしてまた関数の問題でもある。

つまり，かかった時間を x 秒，高さを y m とすれば，y は x の関数なのだ。しかもどんな関数かといえば，y が x についての２次式になっている関数である。

例題　地上から毎秒４０ｍの速さで真上に投げ上げた物体の t 秒後の高さは
（$40t-5t^2$）ｍ　であるという。
これについて，次の問に答えよ。
①　次の時にはこの物体は地上から何ｍの高さにあるか。
　(1) ３秒後　(2) ４秒後　(3) ５秒後
②　物体の高さが３５ｍになるのは投げてから何秒後か。
③　物体が再び地上に落ちるのは，投げてから何秒後か。

考え方
①は方程式の問題ではありません。

これは，この式が t の関数であるということの確認問題です。

つまり，「何秒後か」がわかれば，「そのときの高さ」もわかるということです。

この式　$40t-5t^2$ に　$t=3,\ 4,\ 5$ を代入してみればいいのです。

②が２次方程式の問題。t 秒後に高さが３５ｍになったと考えれば，

　$40t-5t2=35$　が成立する。

t についての２次方程式とみてこれを解けばよい。

③も２次方程式の問題。

地上に落ちたときの高さは０ｍだ。

t 秒後に高さが０ｍになったと考えて方程式をつくる。

解答
①(1)　$40\times3-5\times3^2$
$=120-45=75$
答.　７５ｍ

(2)　$40\times4-5\times4^2$
$=160-80=80$
答.　８０ｍ

(3)　$40\times5-5\times5^2$
$=200-125=75$
答.　７５ｍ

３秒後と５秒後の高さが同じというのは，いちばん高いところまであがった後は，次は落ちてくるから，同じ高さの所を２回通過するからですね。

②　$40t-5t^2=35$
$5t^2-40t+35=0$
$t^2-8t+7=0$
$(t-1)(t-7)=0$
$t-1=0$　または　$t-7=0$
$t=1$　　　　$t=7$
答　１秒後と７秒後

これも上がるときと，落ちてくるときの２回あるということです。

③　$40t-5t^2=0$
$5t^2-40t=0$
$t^2-8t=0$
$t(t-8)=0$
$t=0$　または　$t-8=0$
$t=8$

$t=0$ は投げ上げる瞬間であり，問題に適さない。

答　８秒後

Ⅰ．基本問題

①　ボールを毎秒３０ｍの速さで真上に投げ上げると，t 秒後にははじめの位置から

　（$30t-5t^2$）ｍの高さになる。

(1) はじめの位置から２５ｍ高くなるのは，何秒後か。

(2) 投げ上げた位置に再びもどってくるのは何秒後か。

②　速さ３５ｍ／秒で，物体を真上に投げ上げるとき，はじめから t 秒後の高さをｈｍとすると，およそ

$$h=35t-5t^2$$

の関係が成り立つという。

(1) 高さが５０ｍになるのは，はじめから何秒後か。

(2) もとの位置に物体がもどってくるのは何秒後か。

Ⅱ．練習問題

①　地上から秒速７０ｍで真上に投げ上げた物体は，t 秒後には，およそ

$$(70t-5t^2)\ \mathrm{m}$$

の高さに達するという。

(1)　再び地上に落ちてくるのは，投げ上げてから何秒後か。

(2) この物体が，地上２００ｍの高さを通過するのは，投げ上げてから，およそ何秒後か。

Ⅲ．発展問題

①　地上から真上に秒速２０ｍで，ある物体を投げ上げた。

　この物体の投げ上げてから t 秒後の高さは，約（$20t-5t^2$）ｍで表される。

(1) 物体の高さが１５ｍとなるのは，投げ上げてから何秒後か。

(2) 投げ上げた位置までもどってくるのに何秒かかるか。

(3) この高さの式を変形していった。次の□にあてはまる数を入れよ。

$20t-5t^2$

$=-5t^2+20t$

$=-5(t^2-\boxed{ア}\,t)$　←－５でくくる

$=-5(t^2-\boxed{ア}\,t+4-4)$

$=-5(t^2-\boxed{ア}\,t+4)+20$

$=-5(t-\boxed{イ})^2+20$

　←（　）の中を因数分解（つまり，平方完成）やってます。

　つねに　$(t-\boxed{イ})^2\geqq 0$　であるから，

　これに負の数 -5 をかけた

　$-5(t-\boxed{イ})^2$　は，つねに０以下の数である。

　ということは，もっとも大きくて０であり，

０になるときは $t=\boxed{イ}$ のときである。

　したがって，$20t-5t^2$は，$t=\boxed{イ}$ のとき，もっとも大きくなり，

式は最大値 $\boxed{ウ}$ をとる。

　ゆえに，秒速２０ｍで物体を投げ上げたときは，$\boxed{イ}$ 秒後に，$\boxed{ウ}$ ｍの高さまで上がりこれがいちばん高くまで上がったときである。

②　原点から出発して数直線上を動く点Ｐがある。点Ｐの t 秒後の位置の座標が

　$x=-t^2+8t$　で与えられている。

(1) ２秒後における点Ｐの位置の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた点の位置を再び通過するのは，出発してから何秒後か。

ここでは特別なものではなくて，ごくありふれた数量関係の問題をやってみよう。つまり，普通に考えて，どこかで知らずのうちに方程式が２次方程式になっているというものだ。特に解説なしで，問題をします。

ちなみに，これまで発行されていた教科書会社６社のうち４社に対角線の問題が出ている。

すでに習っている公式のうちで，２次方程式になってしまうのはこの対角線の公式ということだね。ただし，公式の表現はいろいろだ。各社の教科書の表現をそのまま使ってあるので，問題の表現にもいろいろな表現があるのだということをみる参考にしてほしい。

Ⅰ基本問題

①　画用紙１９５枚を何人かの子どもに等分すれば，１人分の枚数は人数より２だけ少ないという。子どもは何人いるか。

②　４０個の机が同じ数ずつ何列かに並べてある。１列の机の数は，列の数より３だけ多いという。机は何列並べてあるか。

③　１１０個のりんごを何人かの子供に等分したら，１人分のりんごの個数は人数より１だけ小さくなった。

子供の人数を求めよ。

④　１から始まる連続した n 個の整数の和は $\dfrac{n(n+1)}{2}$ で求めることができる。

１からいくつまでの整数の和が８２０になるか。

⑤　ＢＣを底辺とする二等辺三角形ＡＢＣがある。

頂角を３６°，∠ＡＢＣの二等分線とＡＣの交点をＤとして，次の問に答えよ。

(1)　△ＡＢＣと相似な三角形をいえ。

(2)　ＡＢ＝５ｃｍのとき，ＢＣは何ｃｍか。

Ⅱ基本問題　　－対角線編－

各教科書の表現のちがいをみよう！

①　n 角形の対角線の数は

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

で求めることができる。

対角線の数が３５である多角形は何角形か。

②　n 角形の対角線は，全部で

$\dfrac{1}{2}n(n-3)$　本ひける。

対角線の数が全部で２０本である多角形は何角形か。

③　n 角形の対角線は $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 本ある。対角線が２７本ある多角形は何角形か。

④　n 角形の対角線は，全部で

$\dfrac{1}{2}n(n-3)$ 本引ける。

対角線が全部で１４本引ける多角形は何角形か。

§.7　体積に関する問題

体積に関する問題といっても，これもよくあるパターン，四角形の４すみを切り取って折り曲げて容器をつくるという問題。
考え方はみな同じだね。

例題　横が縦よりも６ｃｍ長い長方形の紙がある。
　この紙の４すみから，１辺が４ｃｍの正方形を切り取り，直方体の容器をつくったら，容積が１６０ｃｍ^{3}になった。
　はじめの紙の縦と横の長さを求めなさい。

例題　横が縦よりも４ｃｍ長い長方形の紙がある。
　この紙の４すみから，１辺が３ｃｍの正方形を切り取り，直方体の容器をつくったら，容積が９６ｃｍ^{3}になった。
　はじめの紙の縦の長さを求めなさい。

Ｉ基本問題

①　横が縦よりも３ｃｍ長い長方形の紙がある。
　その４すみから１辺が２ｃｍの正方形を切り取り残りを折り曲げてふたのない箱をつくったら，容積が５６ｃｍ^{3}になった。
　もとの長方形の縦の長さを求めなさい。

②　横が縦より５ｃｍ長い長方形の厚紙がある。
　この４すみから１辺が４ｃｍの正方形を切り取り直方体の容器をつくると，容積が２００ｃｍ^{3}になった。
　はじめの厚紙の縦と横の長さを求めなさい。

③　下の図のように正方形の厚紙の４すみから同じ大きさの正方形を切り取って，
深さ１２ｃｍ，容積２.７Ｌの箱をつくりたい。
　もとの正方形の１辺を何ｃｍにすればよいか。