

ここまでのまとめ

$x^2 = n$ であれば、平方根の意味を考えて、解を求めることができます。

$ax^2 + c = 0$ は上の形に変形して解くことができます。

$(x + m)^2 = n$ であれば、 n の平方根を考えることにより、解を求めることができます。

$x^2 + 2ax + a^2 = n$ であれば、左辺を因数分解することにより上の考えで解くことができます。

$x^2 + px + q = 0$ であっても、平方完成の方法により、左辺を平方の形にすることができて、解を求めることができます。

そこで、一般の形の2次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を求めてみます。これが「解の公式」です。

解の公式をつくる

$$5x^2 + 7x + 1 = 0$$

x^2 の係数を1にするために、両辺を5で割ると、

$$x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$$

を移項して、

$$x^2 + x = -\frac{1}{5}$$

左辺を完全平方式にするために、平方完成の方法を使って、両辺に

$\frac{1}{2}$ の平方の $\frac{1}{4}$ を加えて

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x^2 の係数を1にするために、両辺を a で割ると、

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

を移項して、

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

左辺を完全平方式にするために、平方完成の方法を使って、両辺に

$\frac{1}{2}$ の平方の $\frac{b^2}{4a^2}$ を加えて

$$x^2 + x + \frac{1}{5} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}$$

すると左辺は、和の平方の因数分解の公式を当てはめることができ、

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$$

したがって

すると左辺は、和の平方の因数分解の公式を当てはめることができ、

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

したがって

すなわち解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

すなわち解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{の解は}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$