1．２次の項の係数が１でない場合

公式１～４はみな１番目の項の係数が１なのです。

公式１　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
公式２　$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
公式３　$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
公式４　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

では１番目の項の係数が１でないときにはどうするのかということを考えます。
つまり，式の形としては，
　○x^2＋□x＋△
という形になっているときの考え方です。

(1) 共通因数を取り出すことを考える。

考え方　とにかくその多項式に共通因数があるかどうかを調べることが先です。

そして，その共通因数を取り出し，かっこでくくります。
そのあとで，(　)の中にくくった式が公式１～４にあてはまるのなら，公式１～４にあてはめて因数分解します。
公式にあてはまらないのならそれでオシマイ。

例１　$2x^2+12x+16$

この問題は係数がみんな偶数です。つまり２でくくれます。

解　$2x^2+12x+16$

例２　$-x^2+2x+8$

この問題でも，xの係数は１ではありません。係数は－１ですね。
ですからこのままで，かけて８たして２を考えてもダメです。
まず－１でくくらないとダメだということです。

解　$-x^2+2x+8$

このような方法で，共通因数でくくって因数分解ができる(公式にあてはめられる)というのは，x^2の係数が１になるときです。
たとえば，

例３　$9x^2+24x+15$

も係数が３の倍数です。だから３でくくれます。
$9x^2+24x+15=3(3x^2+8x+5)$
しかし，これではかっこの中が因数分解できる形ではありません。これは別の工夫が必要です。これについては次の項でお勉強します。

問題Ⅰ．次の式を因数分解しなさい。
①　$2a^2+14a+24$
②　$5x^2+10x+5$
③　$-2x^2-4x+16$
④　$-y^2+6y-9$
⑤　$4x^2+8x+4$
⑥　$-3y^2+18y-27$
⑦　$-x^2-5x+36$
⑧　$8x^2-18$

(2) ２次の項が$(px)^2$とならないか調べる。

考え方　これもかんづめ方式(びんづめ方式)の１種だと思えばよいのだが，１番目の項をある式「px」の平方の形「$(px)^2$」にもっていくのがミソです。

例４　$4x^2+16x+15$
　＝
こうやってから，かけて１５たして８を考える。
　＝

これは$2x=X$という置き換え(かんづめ)をしていると思ってもいい。つまり
　$4x^2+16x+15$
　＝

例３はこの考えでできます。つまり，２次の項の係数が平方数(４，９，１６，２５　……)のときにはこの方法でできる可能性があります。

例３をやってみましょう。

問題Ⅱ．次の式を因数分解しなさい。
①　$4x^2+10x+6$
②　$9x^2+24x+16$
③　$9a^2+30a+25$
④　$4x^2+12x+9$

２．登場する文字が２種類ある場合

考え方　一方の文字を中心に考えます。

そうして公式１に当てはめて，かけて××，たして△△というように考えてやる必要があります。

例５(これは１種類のとき)

x^2+6x+8

$=(x+2)(x+4)$

ここではかけて８，たして６を考えましたね。

例６(２種類にしたら……)

$x^2+6xy+8y^2$

ここでは一方の文字，x を中心に考えて，

$x^2+6y\times x+8y^2$

つまり，かけて $8y^2$，たして $6y$ を考えます。

そうすると，そのような式は $2y$ と $4y$ です。

$(2y\times 4y=8y^2)$

$(2y+4y=6y)$

そこで，

$x^2+6xy+8y^2$

＝

例７(これは１種類のとき)

$x^2+10x+25$

$=(x+5)(x+5)$

$=(x+5)^2$

例８(２種類にしたら……)

$x^2+10xy+25y^2$

＝

これにさらに輪をかけてややこしくなるのが，x^2 の係数が１でないとき（前のところで取り上げた場合）

例９　$4x^2+20xy+25y^2$

＝

問題Ⅲ．次の式を因数分解しなさい。

①　$x^2-20xy+100y^2$

②　$a^2+4ab+4b^2$

③　$a^2-8ab+16b^2$

④　$4x^2+12xy+9y^2$

⑤　$25y^2-10xy+x^2$

⑥　$-12a^2+27b^2$

３．複雑な式の場合

(1) 見るからにかんづめができそうな式

これはもう見るからに置き換えをすれば(かんづめを作れば)公式にあてはまるといったものがあります。

つまり，同じ式がかっこでくくられているものやよく似ていて，工夫をすればかんづめにできるものです。

考え方　かんづめ方式で因数分解！

例１０　$(x+y)^2+5(x+y)+6$

これなんかもう(　)の中を X とすればいいのだということを問題に示してあるようなものです。やってみると……

解

慣れればびんづめ方式でやってもいいです。頭の中でひとかたまりと考えてね。

(2) 難しいかんづめの作り方

① $x+y$　と　$-x-y$　との関係

これはみるからに関係ありそう(でもないか)

$x+y=A$ とおけば

$-x-y=-(x+y)=-A$

② $x-y$　と　$-x+y$　との関係

$x-y=B$ とおけば

$-x+y=-(x-y)=-B$

例１１　(成城学園高)

$x(a-b)-a+b$

＝　　　　←この変形がミソ！

③ $x-y$　と　$y-x$　との関係

関係なさそうで実はある。なさそでウッフン，ありそでウッフン黄色いサクランボである(おじさんしか知らない！中学生には意味不明！)。

項の順を x の項，y の項の順に並べるとわかります。

$x-y=C$ とおけば

$y-x=-x+y=-(x-y)=-C$

つまりは②と同じなのです。

例１２(兵庫93)

$x(x-2)-(2-x)$

$x-2=X$ とおく

$2-x=-x+2=-(x-2)=-X$

したがって

$x(x-2)-(2-x)$

＝

問題Ⅳ．次の式を因数分解しなさい。

① $(a+b)^2-3(a+b)-4$
② $(x+y)^2-10(x+y)+16$
③ $(a+b)x+(a+b)(y+z)$
④ $a(x-y)+bx-by$
⑤ $(x+y)^2+3(x+y)+2$
⑥ $(a+b)^2-2(a+b)+1$
⑦ $m(x-2y)+n(2y-x)$
⑧ $(x-3)^2-16$
⑨ $a(x-y)-bx+by$
⑩ $ax-3a-x+3$

４．１文字で手がかりのない場合

考え方　一度，展開をして式を整理せよ。

　置き換えができないような場合でも文字が１種類しかないときには，一回展開して，式を整理するとできることがあります。

　例１２をこの方法でやってみると

５．４項式の因数分解の場合

(1) 文字が並列的に並んでいるとき

考え方　お友達を２人ずつつくる

　「１－３，２－４」または「１－２，３－４」というように「２項２項方式」でくくるとうまくいく。これを「ニコニコ方式」といいます(とまあ勝手に名付けてるだけだけど……)。

例１３　$ax-ay-x+y$

　こういうのを文字が規則的に並んでいるというのです。どこが規則的かって？

　例えば，a についてみると，

　　a あり，a あり，a なし，a なし

ということで，２つずつ a の有無で分類できる。

　例えば，x についてみると，

　　x あり，x なし，x あり，x なし

ということで，２つずつ x の有無で分類できる。

　例えば，y についてみると，

　　y なし，y あり，y なし，y あり

ということで，２つずつ y の有無で分類できる。

　例えば，符号についてみると，

　　＋，－，－，＋

ということで，２つずつ＋か－かで分類できる。

　わかったかな？

　式をこういう風にみることができるってことが大切なのだよ。

　では解(１－２，３－４とみると)

例１３　$ax-ay-x+y=a(x-y)-(x-y)$
$=$

　続いて別解(１－３，２－４とみると)

例１３　$ax-ay-x+y=ax-x-ay+y$
$=x(a-1)-y(a-1)$
$=$

問題Ⅴ　次の式を因数分解しなさい。

① x^3+x^2+x+1
② x^3+x^2-x-1
③ $x^2+xy+4x+4y$
④ $x^2-y^2+2x-2y$
⑤ $x^2-3xy+3x-9y$
⑥ $a^2-ab-bc+ac$
⑦ x^4-x^2+x-1

(2) 一方の文字に偏りがあるとき

考え方　偏りをそのまま利用する

　「１項３項方式」でやるとうまくいく。つまり，偏りをそのまま使うのである。

　偏りがあるとは，どれか一つの文字についてみれば，「ニコニコ」の時のような規則性がないということなのだ。

　とにかく例題をやってみよう。

　この例題だと，４つの項のうち x のあるのは１つだけ，y のあるのは２つだけ，符号の＋は１つで，－が３つ，などと式の項に偏りがある。

例１４　$x^2-y^2-8y-16$
$=x^2-(y^2+8y+16)$

問題Ⅵ　次の式を因数分解しなさい。

① x^2-y^2-6y-9
② x^2-y^2+6y-9

　はい，以上です。

　因数分解って難しいね。それは式をどう見るかっていう訓練でもあるし，式をどう見るかっていう数学的な感覚でもあります。

　公立高校や石川県内の私立高校の入試には通常そんな高いレベルの因数分解は出題されません。なので，教科書レベルが解けるようにがんばろう。